OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2015
BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE-CLASA a IX-a

1. a) **(3p)** Să se determine minimul expresiei $E(a)=(a+2)(a^2-6a+16)$, unde $a\in[0,+\infty)$.

b) **(4p)** Demonstrați că pentru orice numere reale pozitive $a,b,c\in[0,+\infty)$, cu $a+b+c=6$, are loc inegalitatea: $\frac{1}{a^2-6a+16}+\frac{1}{b^2-6b+16}+\frac{1}{c^2-6c+16}\le\frac{3}{8}$. Precizați cazul de egalitate.

Dan Popescu, Suceava

Soluție: a) $E(a)=(a+2)(a^2-6a+16)=a^3-6a^2+16a+2a^2-12a+32=a^3-4a^2+4a+32=$

$a(a-2)^2+32\ge 32\Rightarrow \min\{E(a),a\ge 0\}=32$, minim care se realizează pentru $a\in\{0,2\}$.

b) Din subpunctul precedent avem:

$$\frac{1}{a^2-6a+16}\le\frac{a+2}{32},\frac{1}{b^2-6b+16}\le\frac{b+2}{32},\frac{1}{c^2-6c+16}\le\frac{c+2}{32},\forall a,b,c\in[0,+\infty).$$

Adunând cele trei inegalități, termen cu termen, obținem

$$\frac{1}{a^2-6a+16}+\frac{1}{b^2-6b+16}+\frac{1}{c^2-6c+16}\le\frac{a+2+b+2+c+2}{32}=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

Egalitatea are loc dacă $a,b,c\in\{0,2\}$ și din condiția $a+b+c=6$ obținem $a=b=c=2$.

Barem:

a)Determină $E(a)=a^3-4a^2+4a+32$	1p
Găsește minimul	2p
b) Scrie $\frac{1}{a^2-6a+16}\le\frac{a+2}{32},\forall a\in[0,+\infty)$ și analoagele	2p
Adună inegalitățile, finalizare	1p
Determină când are loc egalitatea	1p

2. Să se determine cardinalul mulțimii $A=\left\{x_n\in\mathbb{Q}\mid x_n=\frac{n^2+2}{n^2-n+2},n\in\mathbb{N},1\le n\le 2015\right\}$.

***

Soluție. Vom determina câți termeni ai șirului $(x_n)_n$ din mulțimea A coincid. Fie $m,n\in\mathbb{N},m\ne n.$ Avem $x_n=x_m\Leftrightarrow\frac{n^2+2}{n^2-n+2}=\frac{m^2+2}{m^2-m+2}$. După efectuarea calculelor obținem $x_n=x_m\Leftrightarrow(n-m)(nm-2)=0.$ Cum $m\ne n,$ în mod necesar avem $mn=2\Leftrightarrow(m,n)\in\{(1,2),(2,1)\}$. În concluzie singurii termeni care coincid sunt x_1 și x_2. Deci $card(A)=2014.$

Barem.

Determină numărul de termeni care coincid	6p
Finalizare $card(A)=2014.$	1p

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic $(m(\sphericalangle A)=90^\circ)$ și D, E, M respectiv picioarele înălțimii, bisectoarei și medianei din A. Se notează $BC=a,AC=b,AB=c.$ Arătați că:

$$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\overrightarrow{AD}+\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]\overrightarrow{AM}.$$

***

Soluție. Aplicăm teorema bisectoarei în triunghiul ABC: $\frac{EC}{EB}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\frac{c}{c+b}\overrightarrow{AC}+\frac{b}{c+b}\overrightarrow{AB}.(1)$

Aplicăm teorema catetei pentru AB, respectiv AC și obținem:

$$AC^2=aCD,AB^2=aBD\Rightarrow\frac{DC}{DB}=\frac{b^2}{c^2}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{c^2}{c^2+b^2}\overrightarrow{AC}+\frac{b^2}{c^2+b^2}\overrightarrow{AB}.(2)$$

$[AM]$ este mediană în triunghiul ABC, rezultă $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.(3)$ Din ultimele două relații deducem:

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\overrightarrow{AD}+\left[1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right]\overrightarrow{AM}=\left(\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\frac{c^2}{c^2+b^2}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)\right)\overrightarrow{AC}+$$

$$+\left(\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\frac{b^2}{c^2+b^2}+\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)\right)\overrightarrow{AB}=\frac{c^2+bc}{(b+c)^2}\overrightarrow{AC}+\frac{b^2+bc}{(b+c)^2}\overrightarrow{AB}\overset{(1)}{=}\overrightarrow{AE}.$$

Barem.

Determină relația 1	2p
Determină relația 2	2p
Determină relația 3	1p
Finalizare calcul	2p

4. Fie triunghiul ABC , O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, I_1 centrul cercului înscris în triunghiul ABO şi I_2 centrul cercului înscris în triunghiul ACO. Demonstraţi că $I_1I_2 \parallel BC$ dacă şi numai dacă $[AB]\equiv[AC]$.

Andrei Anca, Suceava

Soluţie. Notăm cu M mijlocul segmentului $[AB]$, N mijlocul segmentului $[AC]$ şi lungimile $AB=c$, $AC=b$ şi $OA=OB=OC=x$. Avem că $MN \parallel BC$ și scriind vectorii de poziție ai punctelor I_1, I_2 obținem:

$\vec{r}_{I_1}=\dfrac{x\vec{r}_B+x\vec{r}_A+c\vec{r}_O}{2x+c}=\dfrac{x\vec{r}_B+x\vec{r}_A}{2x+c}=\dfrac{2x}{2x+c}\vec{r}_M$; $\quad \vec{r}_{I_2}=\dfrac{x\vec{r}_C+x\vec{r}_A}{2x+b}=\dfrac{2x}{2x+b}\vec{r}_N$, de unde rezultă:

$$\overrightarrow{I_1I_2}=\frac{2x}{2x+b}\overrightarrow{ON}-\frac{2x}{2x+c}\overrightarrow{OM}\ .\ (1)$$

Deoarece $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$ şi utilizând relaţia (1) vom avea că:

$$\overrightarrow{I_1I_2}\parallel BC \Leftrightarrow \frac{2x}{2x+b}=\frac{2x}{2x+c}\Leftrightarrow b=c.$$

Barem.

Determină vectorii de poziție ai punctelor I_1, I_2	3p
Determină relația 1	1p
Impune condiția de coliniaritate a vectorilor. Finalizare	3p

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.